Р.А. Акбердин, И.Б. Шмигирилова,
СКУ имени М. Козыбаева (Петропавловск, Казахстан),
akberdin47@mail.ru, irinankzu@mail.ru

РАСКРАСКА РЁБЕР ГРАФОВ И СВЯЗНОСТЬ ОДНОЦВЕТНЫХ СУГРАФОВ

В статье предлагаются задания для исследований, в основе которых лежит подборка олимпиадных задач на графы. В постановке и решениях этих задач используется раскраска рёбер графов.

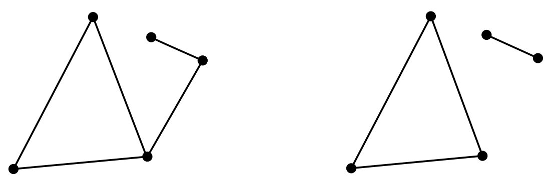
У многих современных школьников математика ассоциируется с большим числом сложных формул. Они и не догадываются, что существуют разделы математики, обходящиеся почти без формул, и в них немало задач, решение которых может привести к интересным «открытиям». Один из таких разделов — *теория графов*. Эта теория не изучается в школе, однако достаточно часто среди заданий математических олимпиад различного уровня встречаются такие, с которыми она поможет успешно справиться. Так что полезно ознакомиться с азами теории графов, а для этого можно воспользоваться книгами [2, 3, 5].

Да и на страницах математических журналов нередки статьи, освящающие различные вопросы из этого раздела [1, 7]. Материалы таких статей могут стать основой для собственных мини-исследований. Так, полученные при разборе задач на графы утверждения можно использовать для постановки исследовательских вопросов, их решения и обобщения [4]. Далее мы предложим примеры заданий для небольших исследований, в основе которых лежит подборка задач на графы. Для постановки и выполнения таких заданий можно использовать раскраску рёбер графов. Но сначала приведём некоторые сведения, необходимые для лучшего понимания дальнейшего изложения.

Обычно под обыкновенным графом понимают картинку, где некоторые пары точек соединены линиями. Примеры подобных иллюстраций приведены на рисунке 1.

Граф — это совокупность множества точек и множества линий, соединяющих пары этих точек. Точки называются *вершинами* графа, а линии — *рёбрами*. Обозначим граф буквой G, число его вершин буквой p, а число рёбер — q. Граф G также называют $(p,\ q)$-графом.

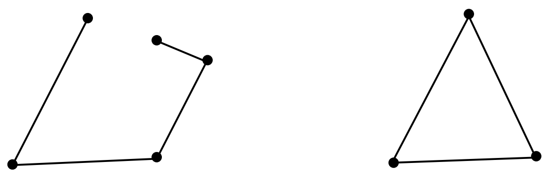
Графы подразделяются на *связные* (рис. 1*а*) и *несвязные* (рис. 1*б*). В связных графах из любой вершины можно попасть в любую другую, двигаясь по рёбрам графа, а в несвязных это невозможно хотя бы для одной пары вершин.



а) *б)*

Рис. 1

Если из графа удалить некоторые рёбра, то полученный граф G_1 называют *суграфом* для исходного графа G. Если из графа удалить некоторые вершины вместе со всеми рёбрами из них исходящими, то полученный граф G_2 называется *подграфом* исходного графа G. Для графа, изображённого на рисунке 1*а*, примеры суграфа и подграфа приведены на рисунках 2*а* и 2*б* соответственно.



а) *б)*

Рис. 2

В дальнейшем будем использовать следующие три предложения.

1°. Наименьшее число рёбер связного графа G на p вершинах равно $p - 1$.

Связный граф без циклов (цикл — это замкнутый путь, пролегающий по рёбрам графа, при этом по любому ребру можно пройти не более одного раза) называется *деревом*. Пример дерева на 5 вершинах приведён на рисунке 3, у него число рёбер $q = 5 - 1 = 4$.

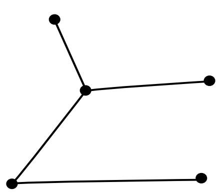


Рис. 3

Граф, у которого любая пара вершин смежна (соединена ребром), называется *полным графом*. На рисунке 4 показан пример полного графа с пятью вершинами.

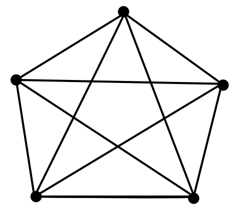


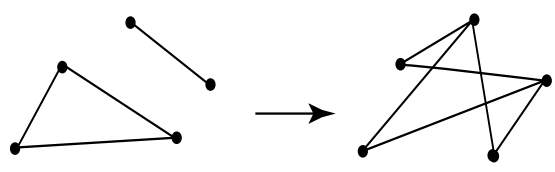
Рис. 4

Полный граф на p вершинах принято обозначать K_p. Число q его рёбер вычисляется по формуле

$$q = \frac{p(p-1)}{2}.$$

2°. Наибольшее число рёбер связного графа на p вершинах равно $\frac{p(p-1)}{2}$.

Граф $\overline{G}$ называют *дополнительным* к графу G, если множества вершин этих графов совпадают, а две вершины в графе $\overline{G}$ смежны тогда и только тогда, когда они несмежны в графе G (рис. 5).

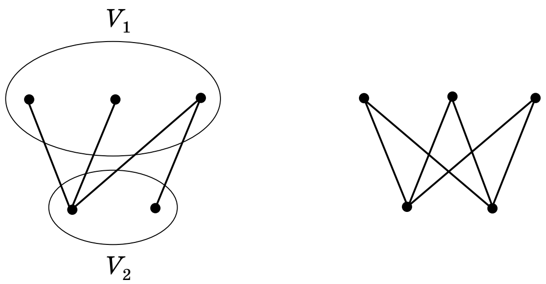


G $\overline{G}$

Рис. 5

3°. Если G — несвязный граф, то $\overline{G}$ — связный граф.

Граф G называют *двудольным*, если существует такое разбиение множества его вершин на две части — доли V_1 и V_2, что любое ребро этого графа соединяет вершины только из разных долей. Двудольный граф, у которого любая пара вершин из разных долей смежна, называют *полным двудольным* графом. На рисунках 6*а* и 6*б* приведены примеры двудольного графа и полного двудольного графа соответственно.



а) *б)*

Рис. 6

В дальнейшем будем использовать *раскраску рёбер графа*, то есть присваивать каждому ребру графа определённый цвет.

Перейдём к рассмотрению задач нашего мини-исследования.

Задача 1. Некоторые пары из p населённых пунктов соединены дорогами (не более одной для каждой пары). Число таких участков дорог меньше $2p - 2$. Районная администрация объявила тендер на обслуживание всех этих участков дорог. В тендере приняли участие две компании. По условиям тендера сеть дорог, обслуживаемая каждой из этих компаний, должна быть связной. Возможно ли проведение тендера при этих условиях?

На рисунке 7 приведены два примера раскраски рёбер в два цвета (распределения дорог для обслуживания двумя компаниями) и выделены суграфы для каждой из этих раскрасок. Причём по крайней мере один из двух одноцветных суграфов являются несвязным.

Отрицательный ответ на поставленный в задаче 1 вопрос даёт следующее предложение.

4°. Если в графе G на p вершинах число рёбер $q < 2p - 2$ и рёбра покрашены в два цвета (каждое ребро в один цвет и оба цвета использованы), то по крайней мере один одноцветный суграф является несвязным.

Доказательство. Если исходный граф является несвязным, то оба суграфа G_1 и G_2 являются несвязными. Пусть G — связный граф. Предположим, что оба суграфа G_1 и G_2 являются связными, тогда

$$q_1 \geq p - 1 \text{ и } q_2 \geq p - 1$$

(см. 1°), где q_1 и q_2 — соответственно число рёбер в G_1 и G_2. Тогда

$$q = q_1 + q_2 \geq 2p - 2,$$

что противоречит условию $q < 2p - 2$.

Исследуем некоторые вопросы, связанные с этим предложением.

1. Если число рёбер исходного графа $q \leq p - 1$, что можно утверждать о связности суграфов G_1 и G_2?

Очевидно, что если $q < p - 1$, то G — несвязный граф, следовательно, суграфы G_1 и G_2 — несвязные. Если $q = p - 1$ и G — связный граф, то G — дерево и суграфы G_1 и G_2 — несвязные.

2. Если $p - 1 < q < 2(p - 1)$, то по крайней мере один суграф является несвязным (см. пример на рисунке 7).

3. Если

$$2(p-1) \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2},$$

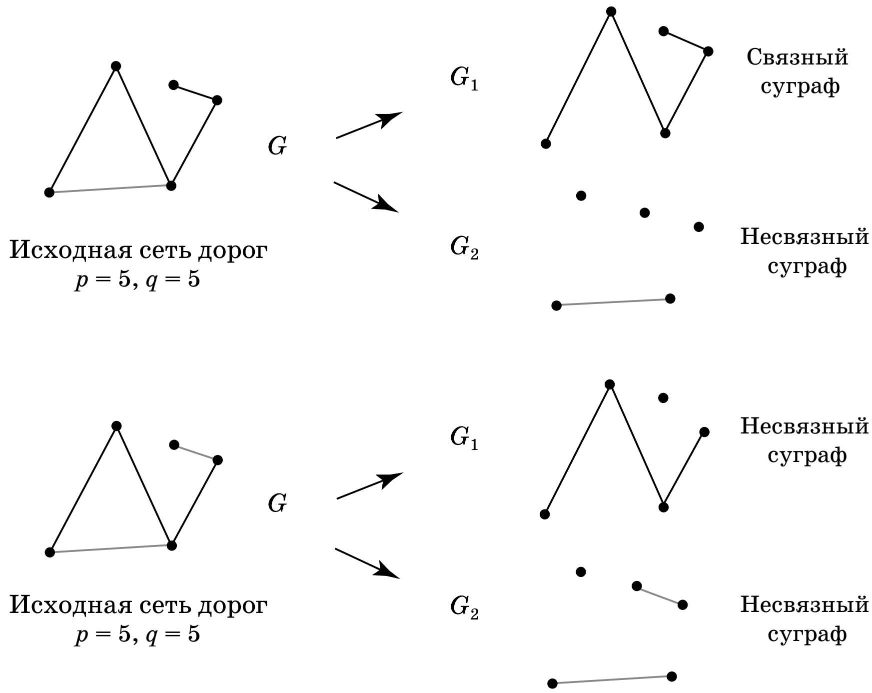


Рис. 7

где для полного графа K_p число рёбер

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \text{ и } p \geq 4,$$

то возможны такие три случая (рис. 8):

а) оба суграфа несвязные;

б) один суграф связный, а другой несвязный;

в) оба суграфа связные.

Для полного графа при любой раскраске по крайней мере один из суграфов является связным (см. 3°).

Задание для исследования. Придумайте другие примеры, иллюстрирующие описанные ситуации.

Продолжение исследования может состоять в увеличении либо числа красок (от 3 до k) для раскраски рёбер графов, либо числа компаний в условии задачи 1.

Очевидно, что наибольшее число красок $k \leq q$, где q — число рёбер, а

$$q \leq \frac{p(p-1)}{2}.$$

По аналогии с предложением 4° сформулируем утверждение для k красок.

5°. Если в графе G на p вершинах число рёбер

$$q < k(p-1), \text{ где } k < \frac{p}{2},$$

и рёбра покрашены в k цветов (каждое ребро в один цвет и все k цветов использованы), то по крайней мере один из одноцветных суграфов является несвязным.

Задание для исследования. Докажите это утверждение по аналогии с доказательством предложения 4°.

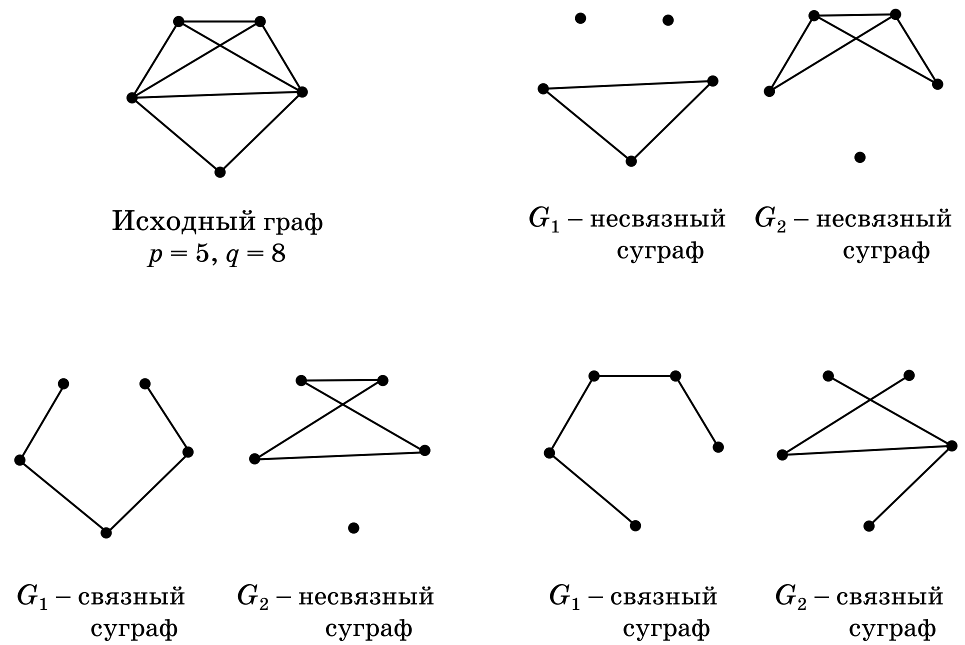


Рис. 8

Для случая трёх красок проведём исследования аналогичные тем, что проводились в случае двух красок. Результаты их приведены ниже.

1. Если число рёбер исходного графа $q \le p - 1$, то все три суграфа являются несвязными.

2. Если $p - 1 < q < 3(p - 1)$, то по крайней мере один суграф является несвязным.

3. Если

$$3(p-1) \le q \le \frac{p(p-1)}{2},$$

то возможны такие четыре случая:

а) все три суграфа несвязные;

б) один суграф связный, два — несвязные;

в) один суграф несвязный, два — связные;

г) все три суграфа связные.

Задание для исследования. Придумайте примеры, иллюстрирующие каждый из этих случаев.

Рассмотрим пример раскраски рёбер полного графа K_p в три цвета, при которой все три суграфа являются несвязными. Пусть $p = 5$. В исходном графе выделяются подграф K_{p-3} и подграф K_3 с вершинами i, j, k. Каждая из этих вершин соединяется рёбрами с каждой из вершин подграфа K_{p-3}. Возможная покраска рёбер показана на рисунке 9.

Заметим, что граф K_{p-3} можно заменить любым связным графом G^*, а каждую из вершин i, j, k соединить ребром ровно с одной вершиной G^*. Приведённый пример даёт решение следующей задачи, которую можно отнести к олимпиадным.

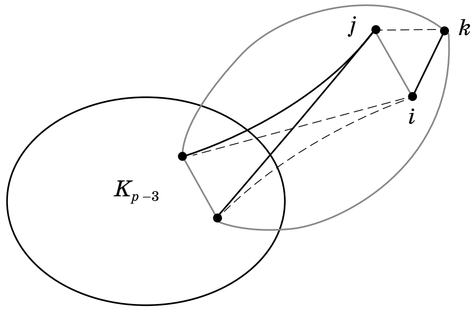


Рис. 9

Задача 2. В стране n городов. Между каждыми двумя городами нужно установить воздушное сообщение одной из трёх авиакомпаний. Докажите: это можно сделать так, что ни одна авиакомпания не обеспечит возможность попасть из любого города в любой другой город только её рейсами.

Исследуем ещё одну олимпиадную задачу.

Задача 3. В регионе имеется p населённых пунктов, некоторые пары из которых соединены дорогами. Все эти участки дороги распределены для обслуживания между тремя дорожными компаниями. При этом если любая из компаний прекратит обслуживание своих участков дорог, то из любого населённого пункта можно будет проехать в любой другой пункт, пользуясь только дорогами, обслуживаемыми двумя другими компаниями. Найдите наименьшее число участков дорог в регионе.

Решение данной задачи может опираться на следующее предложение.

6°. Если рёбра связного $(p,\ q)$-графа окрашены в три цвета так, что любой из трёх его двухцветных суграфов (то есть графов, полученных удалением рёбер одного цвета) является связным, то

$$q \geq \frac{3p-3}{2}.$$

Доказательство. Пусть число одноцветных рёбер исходного графа G равно соответственно q_1, q_2, q_3. Тогда если G_1, G_2, G_3 — суграфы, полученные удалением одноцветных рёбер, то

$$q_2 + q_3 \geq p - 1,$$
$$q_1 + q_3 \geq p - 1,$$
$$q_1 + q_2 \geq p - 1,$$

так как G_1, G_2, G_3 — связные графы на p вершинах. Следовательно,

$$2(q_1 + q_2 + q_3) \geq 3(p - 1),$$
$$q_1 + q_2 + q_3 \geq \frac{3p-3}{2},$$
$$q \geq \frac{3p-3}{2}.$$

Как и в случае с задачей 1, число красок можно увеличить.

Задание для исследования. Докажите следующие два утверждения 7° и 8° по аналогии с доказательством предложения 6°.

7°. Если рёбра связного (p, q)-графа окрашены в k цветов так, что любой из k суграфов, полученных удалением одноцветных ребер, также является связным, то

$$q \geq \frac{k(p-1)}{k-1}.$$

8°. Если рёбра связного $(p,\ q)$-графа окрашены в k цветов так, что любой из суграфов, полученных удалением рёбер l цветов $(l < k)$, остаётся связным, то

$$q \geq \frac{C_k^l(p-1)}{k-l}.$$

Здесь первый множитель в числителе — число сочетаний из k элементов по l:

$$C_k^l = \frac{k}{(k-l)!l!} = \frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-l+1)}{l\cdot(l-1)\cdot\ldots\cdot 1}.$$

На Всероссийской олимпиаде школьников по математике в 2021 году учащимся 10 класса была предложена следующая задача.

Задача 4 [1]. В стране N городов. Некоторые пары городов связаны двусторонними авиалиниями, каждая пара не более чем одной. Каждая авиалиния принадлежит одной из k компаний. Оказалось, что из любого города можно попасть в любой другой (возможно, с пересадками), но при закрытии всех авиалиний любой из компаний это свойство нарушается. Какое наибольшее количество авиалиний (при произвольных данных N и k) могло быть в этой стране?

Решение этой задаче приведено в [6]. Был получен такой ответ: наибольшее число авиалиний равно $C_N^2 - C_K^2$. (при $k < N$). Сформулируем соответствующее предложение на языке теории графов.

9°. Если рёбра связанного (p, q)-графа окрашены в k цветов так, что любой из k суграфов, полученный удалением одноцветных рёбер, является несвязным, то при $k < p$

$$q \le C_p^2 - C_k^2, \text{ или}$$

$$q \le \frac{p(p-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}.$$

Задание для исследования. Попробуйте доказать это предложение. По крайней мере, разберитесь в доказательстве, данном в [6].

Приведём пример графа, для которого достигается верхняя оценка, и соответствующую раскраску рёбер.

1. Сконструируем граф G. В полном графе K_p выделим k вершин: v_1, v_2, …, v_k. Удалим рёбра полного подграфа K_k. Число рёбер полученного графа G

$$q = C_p^2 - C_k^2.$$

2. Рёбра графа G, инцидентные вершинам[1], покрасим в i-й цвет. Остальные рёбра покрасим в один из k цветов произвольно. Тогда в каждом из K-суграфов, полученных удалением ребер i-го цвета, вершины v_i являются изолированными, следовательно, каждый из этих K-суграфов является несвязным.

3. Пример такого графа и раскраски его рёбер для случая $p = 6$, $k = 3$ приведён на рисунке 10.

Было бы любопытно привести примеры графов, для которых существуют такие раскраски рёбер в k цветов, что каждый из K-суграфов, полученных удалением одноцветных рёбер каждого из k цветов, является:

а) связным (см. задачу 3, утверждение 6°);

б) несвязным (см. задачу 4, утверждение 9°).

Задание для исследования. Исследуйте вопрос о существовании таких графов для $k = 2, 3, 4$.

Следующая задача также связана с окраской рёбер графа, но с существованием связных одноцветных подграфов заданного графа.

Задача 5. Любые два из n одноклассников могут связаться на каникулах по Internet ровно один раз в один из трёх дней недели. Классный руководитель запланировала проведение турпохода. Докажите, что она сможет выбрать такой из этих трёх дней недели и такого ученика, что, если она передаст ему сообщение о

[1] Если вершина является началом или концом ребра графа, то говорят, что они инцидентны.

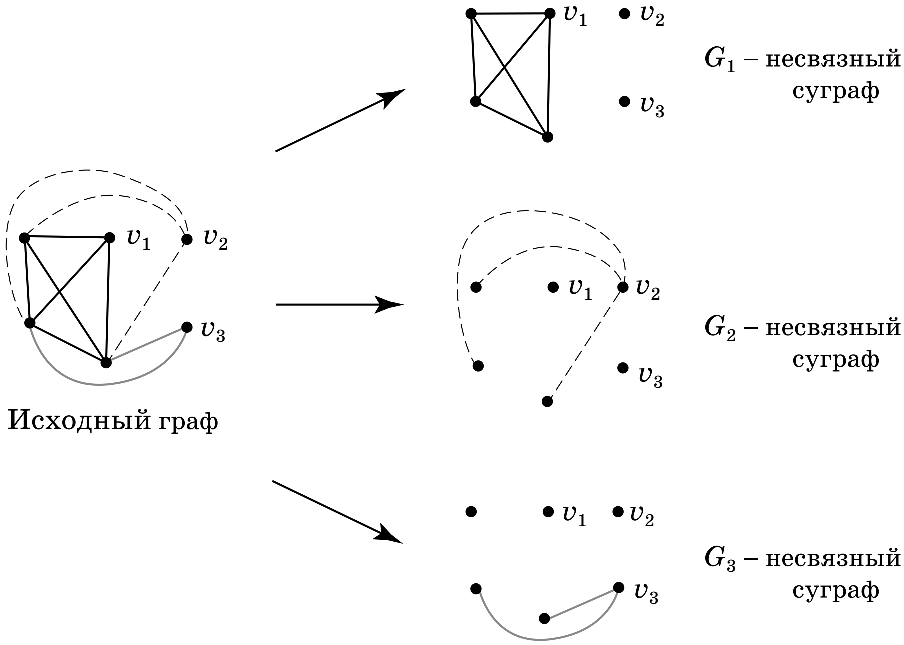
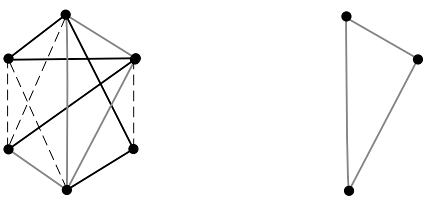


Рис. 10



Исходный граф ($p = 6$)

Одноцветный связный подграф ($p = 3$)

Рис. 11

турпоходе, на следующий день после выбранного дня недели соберётся не менее половины учеников класса. Каждый, получив сообщение, обязан передать его всем одноклассникам, с которыми он сможет связаться в этот же день.

Решение задачи можно свести к следующему предложению.

10°. Если рёбра полного графа на p вершинах покрашены в три цвета, то найдётся одноцветный связный подграф с не менее чем $\frac{p}{2}$ вершинами, где $p \geq 3$.

Пример для случая $p = 6$ показан на рисунке 11.

Если захотите самостоятельно провести мини-исследования, подобные рассмотренным, для выбора подходящих тем можете использовать олимпиадные задачи, решаемые с помощью графов [2, 4, 8].

Список источников

1. *Агаханов Н., Богданов И. и др.* Заключительный этап XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике // Квант — 2021. — № 7. — С. 48–51.

2. *Березина Л.Ю.* Графы и их применение. — М.: Просвещение, 1979.

3. *Клауди Альсина*. Карты метро и нейронные сети. Теория графов. – М.: DeAgostini, 2014.

4. *Мельников О.И*. Занимательные задачи по теории графов. — Изд. 2-е, стер. — Минск: ТетраСистемс, 2001.

5. *Оре О*. Графы и их применение. — М.: Мир, 1965.

6. Ответы, указания, решения. Заключительный этап XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике // Квант. — 2021. — № 8. — С. 46–64.

7. *Райгородский А*. Ещё об одной «олимпиадной» задаче про графы, или Ещё одна задача о раскраске // Квант. — 2023. — № 3. — С. 14–19.

8. *Фомин Д.В*. Санкт-Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Политехника, 1994.